数理解析研究所講究録
930 巻 1995 年 25-27

Finite Images of Topological Groups

東京大学大学院数理科学研究科 東川 雅志 (Masasi Higasikawa)

概要

位相群の有限連続像が代数構造から定まる条件について調べる.

1 序

群 G に対して, G を定義域とする準同形の像として現れる有限群の全体を $\mathcal{F}(G)$ とする. 同形な有限群は必要に応じて同一視することにして, $\mathcal{F}(G)$ は高々可算集合である. さらに, G が $(\mathrm{T}_2\text{-})$ 位相群でもある場合, $\mathcal{F}(G)$ のうち連続な準同形の像となっているもの全体を $\mathcal{F}_{\mathrm{top}}(G)$ とする. ただし, 有限群にはつねに離散位相を与えることとする. 位相群 G が $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}_{\mathrm{top}}(G)$ をみたすとき, G は FQP (Finite Quotient Property) をもつということにする.

この稿では, 位相群が FQP をもつか否かに関して, いくつかの条件と例を挙げる.

2 局所コンパクト群と有限アーベル群

有界なアーベル群については, 構造定理 (cf. [1], Theorem 17.2) によって, 像と部分群が一致することがわかる.

定理 2.1 有界なアーベル群は, 巡回群の直和である. したがって, A, B を有界なアーベル群とするとき, 次の (1)(2) は同値.
(1) 全射準同形 $A \to B$ が存在する.
(2) 単射準同形 $B \to A$ が存在する. □

補題 2.2 位相群 G とその指標群 $\hat{G}$ について, $\hat{G}$ の有限部分集合 B が有限アーベル群 $K = \bigoplus_{\chi\in B}\langle\chi\rangle$ を生成するとする. このとき, 写像 $\bigoplus B : G \to \bigoplus_B U(1)$ の像は K と同形である. ($U(1) = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.)

証明 アーベル群 $U(1), \hat{G}$ の演算は加法で表し, 単位元は 0 で表すことにする. 各 $\chi \in B$ について, $m_\chi = \mathrm{ord}(\chi)$, $C_\chi = \langle \exp(2\pi i/m_\chi)\rangle \subset U(1)$ とおき, $H = \bigoplus_{\chi\in B} C_\chi$ とすると,

$$\mathrm{Im}\left(\bigoplus B\right) \subseteq H \cong K.$$

ここで $\mathrm{Im}(\bigoplus B) \subsetneq H$ と仮定すると, 自然数 $n_\chi, \chi \in B$ が存在して,

$$\mathrm{Im}\left(\bigoplus B\right) \subseteq \left\{(h_\chi)_{\chi\in B} \in H : \sum_{\chi\in B} n_\chi h_\chi = 0\right\} \subsetneq H.$$

このとき, $\sum_{\chi\in B} n_\chi \chi = 0$. これは, B の独立性に矛盾. □

系 2.3 有界な局所コンパクトアーベル群は, FQP をもつ.

証明 有界な局所コンパクトアーベル群 A と有限群 K について, $K \in \mathcal{F}(A)$ を仮定し, $K \in \mathcal{F}_{\mathrm{top}}(A)$ を導く.

仮定と定理 2.1より, K は A の部分群としてよい. Pontryagin の双対定理により $A \cong \hat{\hat{A}}$ であるから, 補題 2.2を適用して, $K \in \mathcal{F}_{\mathrm{top}}(\hat{A})$ を得る.

$\hat{A}$ もまた有界であるから, 同様の議論をもう一度繰り返して, $K \in \mathcal{F}_{\mathrm{top}}(A)$. □

定理 2.4 有限アーベル群 K と自然数 m が $mK = 0$ をみたすとする. 局所コンパクト群 G に対して $A = G/\overline{G^m[G,G]}$ とおくと, 次の (1)–(4) は同値.

(1) $K \in \mathcal{F}_{\mathrm{top}}(G)$.
(2) $K \in \mathcal{F}_{\mathrm{top}}(A)$.
(3) $K \in \mathcal{F}(A)$.
(4) K は A の部分群 (と同形).

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): 連続準同形 $f : G \to K$ について, $\overline{G^m[G,G]} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

(2) $\Rightarrow$ (1): 自然な全射 $G \to A$ がある.
(2) $\Leftrightarrow$ (3): 系 2.3.
(3) $\Leftrightarrow$ (4): 定理 2.1. □

系 2.5 コンパクトアーベル群は FQP をもつ.

証明 コンパクトアーベル群 A と自然数 m に対して, mA は閉だから. □

3 FQP の反例

系 2.3の条件「有界」を落とすと反例がある.

例 3.1 (cf. [2], (24.44)) 局所コンパクトアーベル群 A で, $2A \subsetneq \overline{2A} = A$ となるものがある. これについて, $C_2 \in \mathcal{F}(A) \setminus \mathcal{F}_{\mathrm{top}}(A)$. (ここで, 位数 m の巡回群を C_m で表す.)

また, 系 2.5の条件「アーベル」も落とせない. これを示すために, 有限群に関する補題を準備する.

素数 p および群 G とその元 g について, g が p 乗元と交換子で生成されないなら $l_p(g) = \infty$, 生成されるなら

$$l_p(g) = \min\{n : (\exists x, y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n \in G)(g = x^p[y_1, z_1] \cdots [y_n, z_n])\}$$

とし,

$$d_p(G) = \sup\{l_p(g) | g \in G\}$$

とおく.

補題 3.2 G が $G = [G,G]$ をみたす有限群を走るとき, $d_p(G)$ は有界でない.

証明 [3], Lemma 2.1.10 の証明とほとんど同じ. 群 G に対して, $Z_p(G) = \{g \in Z(G) | g^p = 1\}$ とおくと, g^p や $[g,h]$ は $gZ_p(G)$ と $hZ_p(G)$ だけで決まる. よって, $G = G^p[G,G]$ のとき

$$|G| \leq |G/Z_p(G)|^{2d_p(G)+1}$$

つまり,

$$d_p(G) \geq \frac{\log |Z_p(G)|}{2 \log |G/Z_p(G)|}$$

となっていることに注意する.

以下, q は素数 p の冪で $q > 3$ とし, 自然数 $n > 1$ をパラメータにもつ有限群 G を構成する. まず, 有限体 $\mathbf{F}_q$ の $m = n(n-1)/2$ 個の直和を Z, $\mathbf{F}_q^2$ の n 個の直和を Q とおく. また, $\{1, 2, ..., m\}$ と $\{(i,j) | 1 \le i < j \le n\}$ との間の 1 対 1 対応をとり, 自然数 k に対応する対を $(i(k), j(k))$ で表す. 次に, 直積集合 $Q \times Z$ に

$$((x_i)_{i=1,...,n}, (a_k)_{k=1,...,m})((y_i)_{i=1,...,n}, (b_k)_{k=1,...,m}) = ((x_i + y_i)_{i=1,...,n}, (a_k + b_k + \det(x_{i(k)}\, y_{j(k)}))_{k=1,...,m})$$

で演算を定めたものを P とおく. このとき, P は群をなし, 自然な同一視 $Z \cong \{0\} \times Z$ によって,

$$Z = Z_p(P) = [P, P]$$

となっている.

さらに, $H = SL(2, q)$ の P への作用を

$$h((x_i)_{i=1,...,n}, (a_k)_{k=1,...,m}) = ((hx_i)_{i=1,...,n}, (a_k)_{k=1,...,m})$$

で定める. この作用のもとでの H と P の半直積を G とおく. このとき,

$$G = [G, G],$$

$$Z = Z_p(G),$$

$$\lim_{n \to \infty} d_p(G) = \infty$$

がなりたつ. □

例 3.3 有限群の列 $G_0, G_1, ...$ で,

$$d_p(G_0) < d_p(G_1) < ... < \infty$$

をみたすものの存在が, 補題によって保証されている. この可算個の有限群の直積を G_Π とおくと, これはコンパクト. 一方,

$$G_\Pi^p[G_\Pi, G_\Pi] \subsetneq \overline{G_\Pi^p[G_\Pi, G_\Pi]} = G_\Pi$$

であるから,

$$C_p \in \mathcal{F}(G_\Pi) \setminus \mathcal{F}_{\text{top}}(G_\Pi).$$

参考文献

[1] L. Fuchs, Infinite abelian groups. vol. 1, Academic Press, 1970.

[2] E. Hewitt and K.A. Ross, Abstract harmonic analysis. I, Springer-Verlag, 1963.

[3] D.F. Holt and W. Plesken, Perfect groups, Oxford University Press, 1989.